

SIMULACIÓN MORFOGÉNICA DE UNA PLANTA DE ÉBANO (CAESALPINIA EBANO) UTILIZANDO GRAMÁTICAS L-SYSTEMS

SANTIAGO GARCÍA CORRALES

**Trabajo de grado para optar al título de
Ingeniero de Sistemas y Computación**

John Edgar Congote Calle. PhD



**UNIVERSIDAD EIA
INGENIERÍA DE SISTEMAS Y COMPUTACIÓN
ENVIGADO
2016**

CONTENIDO

| | pág. |
|---|------|
| INTRODUCCIÓN..... | 9 |
| 1. PRELIMINARES..... | 10 |
| 1.1 Planteamiento del problema | 10 |
| 1.1.1 Formulación del problema | 10 |
| 1.1.2 Justificación del problema | 10 |
| 1.2 Objetivos del proyecto | 11 |
| 1.2.1 Objetivo General..... | 11 |
| 1.2.2 Objetivos Específicos | 11 |
| 1.3 Marco de referencia..... | 12 |
| 1.3.1 Antecedentes | 12 |
| 1.3.2 Marco Teórico | 12 |
| 2. METODOLOGÍA..... | 19 |
| 3. TOMA Y TABULACIÓN DE LOS DATOS | 20 |
| 4. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO USANDO GRAMÁTICAS L-SYSTEMS | 24 |
| 5. DESARROLLO DEL SIMULADOR DE GRAMÁTICAS L-SYSTEMS | 25 |
| 5.1 Diagrama de clases..... | 26 |
| 5.2 Diagrama de arquitectura | 27 |
| 5.3 Descripción del sistema..... | 27 |
| 5.4 Funcionamiento del sistema | 29 |
| 6. COMPARAR RESULTADOS DEL MODELO SIMULADO CON LOS ARBOLES REALES | 31 |
| 6.1 Comparación Ébano 1 | 31 |

| | | |
|-------|--|----|
| 6.1.1 | Ébano 1 vs Simulación | 33 |
| 6.2 | Comparación Ébano 2 | 33 |
| 6.2.1 | Ébano 2 vs Simulación | 34 |
| 7. | DISCUSIÓN DE RESULTADOS | 36 |
| 8. | CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES | 37 |
| | BIBLIOGRAFÍA..... | 38 |

LISTA DE TABLAS

| | |
|---|------|
| | pág. |
| Tabla 1. Tabulación de las variables tenidas en cuenta en los Ébanos durante seis meses. | 22 |
| Tabla 2. Promedios de los datos obtenidos de los Ébanos. | 22 |
| Tabla 3. Probabilidad de ocurrencia de cada tipo de hoja..... | 23 |
| Tabla 4. Probabilidades de cada tipo de crecimiento de las ramas..... | 23 |
| Tabla 5. Semillas que mejor representan a cada Ébano | 31 |
| Tabla 6. Iteraciones simuladas del Ébano 1..... | 31 |
| Tabla 7. Datos continuos del ébano 1 con la fórmula del sistema..... | 32 |
| Tabla 8. Datos discretos del ébano 1 con la fórmula del sistema..... | 32 |
| Tabla 9. Comparación entre el ébano 1 real y el simulado..... | 33 |
| Tabla 10. Iteraciones simuladas del Ébano 2..... | 34 |
| Tabla 11. Datos continuos del ébano 2 con la fórmula del sistema..... | 34 |
| Tabla 12. Datos discretos del ébano 2 con la fórmula del sistema..... | 34 |
| Tabla 13. Comparación entre el ébano 1 real y el simulado..... | 35 |

LISTA DE FIGURAS

| | pág. |
|--|------|
| Figura 1. Ejes coordenados en el espacio 3D. (Padleckas, 2005). | 13 |
| Figura 2. Resultado del L-System luego de evaluar las reglas durante 10 iteraciones. (Prusinkiewicz & Lindenmayer, 1990). | 14 |
| Figura 3. Ejemplo de árboles generados por medio de la gramática L-Systems. (Solkoll, n.d.) [Public domain]. | 14 |
| Figura 4 Foto de un Ébano (caesalpinia ebano) tomado de (Herbario Universidad de Antioquia, n.d.). | 15 |
| Figura 5. Ejemplo de un diagrama de clases (The Photographer, 2010). | 16 |
| Figura 6. Ejemplo de un diagrama de arquitectura (Uribe, 2011) | 17 |
| Figura 7. Diagrama MVC (Alvarez, 2014) | 17 |
| Figura 8. Hoja 1. | 20 |
| Figura 9. Hoja 2. | 20 |
| Figura 10. Hoja 3. | 20 |
| Figura 11. Hoja 4. | 20 |
| Figura 12. Hoja 5. | 20 |
| Figura 13. Estructura física del Ébano | 23 |
| Figura 14. Diagrama de clases del simulador | 26 |
| Figura 15. Diagrama de arquitectura..... | 27 |
| Figura 16. Estado inicial del simulador..... | 29 |
| Figura 17. Estado del simulador luego de ingresar las reglas | 29 |
| Figura 18. Resultado de la simulación | 30 |

GLOSARIO

ÁREA FOLIAR: cantidad de superficie en hojas que una planta tiene.

EVAPOTRANSPIRACIÓN: cantidad de agua del suelo que vuelve a la atmósfera como consecuencia de la evaporación y de la transpiración de las plantas.

DEPOSICIÓN ATMOSFÉRICA: el proceso por el cual sustancias químicas, tales como partículas contaminantes son transferidas de la atmósfera a la superficie de la tierra.

COMPUESTOS ORGÁNICOS VOLÁTILES: son sustancias químicas orgánicas cuya base es el carbono y se evaporan a temperatura y presión ambiental generando vapores, que pueden ser precursores del ozono en la atmósfera. Además del carbono es posible hallar en su composición hidrógeno, flúor, oxígeno, cloro, bromo, nitrógeno o azufre.

RESUMEN

El estudio del crecimiento de las plantas, en especial de los árboles, puede llegar a ser complicado debido a que no hay manera de conocer cómo será el crecimiento y desarrollo de ellos. En el caso del cálculo del área foliar, conocer con exactitud cuántas hojas tienen un árbol en cualquier etapa de su vida es una tarea casi imposible de lograr. Por lo tanto, el hacer uso de la gramática *L-Systems* es un buen método para conocer el crecimiento físico de las plantas, en este caso de los Ébanos (*caesalpinia ebano*).

Para lograr el objetivo de simular el crecimiento del Ébano, se realizó un seguimiento durante 6 meses a dos plantas de Ébano. Tomando datos relevantes, como número de hojas, número de ramas, probabilidades y formas en el crecimiento de ambas plantas.

Luego con todos los datos recopilados se construyó un modelo haciendo uso de las gramáticas *L-Systems* que describiera el crecimiento físico de las plantas estudiadas. Posteriormente se hizo la implementación de una aplicación web que permite simular cualquier tipo de modelo *L-System* y lo grafica de forma tridimensional.

Con el modelo, los datos tomados y el simulador, se realizó la comparación entre la planta real y el modelo simulado. En el caso de ambas plantas, el modelo llegó a tener un alto nivel similitud.

Palabras clave: l-systems, gramática, simulación, ébano, web

ABSTRACT

The study of the growth of plants, specially the trees, can be complicated due to there is no way of knowing how would be their growth and development. In the leaf area case, is crucial to know precisely the number of leafs that a tree has during its life. But this task can be impossible to accomplish due to its complexity. Therefore making use of the L-System grammar is a good method of knowing the growth of plants in this case of the *Ébanos* (*caesalpinia ebano*).

To accomplish the objective of simulating the growth of the *Ébano*, it was made a follow up of two plants during six months. Taking relevant data as leafs number, branches number, probabilities and physical growth of the plant.

Then with all the data recollected, it was made an L-Systems model that describes the physical growth of both plants. Afterwards it was implemented a web application that allows the simulation of any kind of L-System and graphs them in 3D.

With the model, data and simulator, it was performed a comparison between the real plant and the simulated one. It showed that the model had a big similitude with the real plant.

Key words: l-systems, simulation, ébano, grammatic, web

INTRODUCCIÓN

En el estudio de las plantas, el saber con exactitud cuántas hojas puede llegar a tener un árbol en cierta etapa de su vida, puede llegar a ser una tarea casi imposible. Es por eso que la gramática de los *L-Systems* puede llevar a un nivel más acertado el resultado de cuantas hojas un árbol tiene en una etapa de su vida.

Los *L-Systems* son unas gramáticas que permiten modelar la estructura física de las plantas haciendo uso de cadenas de caracteres que se construyen a partir de unas reglas que son evaluadas de manera recursiva.

Principalmente, estos sistemas han sido usados en la industria de los videojuegos. Ya que por medio de estas gramáticas la construcción de estructuras arbóreas realistas y de gran detalle se puede hacer en tiempo record y sin necesidad de la mano humana. Pero los sistemas que se obtienen de allí no se han comparado versus plantas reales.

Otro uso que vale la pena mencionar es que en un estudio que se hizo en el 2011, se logró modelar y simular la estructura del hongo *Alternaria*. Que sin el uso de las gramáticas *L-Systems* habría sido imposible lograr la simulación de su estructura, debido a que era tan compleja y variaba tanto que no había manera de que un humano llegara a descifrarla.

Para poder lograr la construcción de un modelo de la planta de Ébano, se debe hacer un seguimiento a la planta, para así obtener los datos necesarios que pueda llevar al desarrollo del modelo. En el seguimiento a las plantas, se van a tener en cuenta parámetros como las longitudes de las ramas, ángulos entre las mismas, número y tipo de hojas.

Ya con los datos recopilados y tabulados, se puede hacer la construcción del modelo, el cual va a ser usado en el simulador de *L-Systems*. Este simulador va a ser una aplicación web, desarrollada con un framework MVC y haciendo uso de WebGL para las gráficas 3D.

Con el simulador listo, se compararán los resultados del seguimiento y la simulación, en el número de hojas y estructura física de las plantas.

1. PRELIMINARES

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1 Formulación del problema

En la actualidad, existen técnicas para conocer de forma precisa el comportamiento del entorno, lo cual permite de una manera mucho más sencilla poder predecir con cierta confiabilidad que podría suceder en un futuro con el comportamiento de lo que se esté estudiando, esto se conoce como una simulación.

Actualmente las simulaciones son hechas por medio del computador, el cual es un dispositivo que permite realizarlas de una manera más rápida y eficaz, haciendo que problemas que contienen una infinidad de variables que alteran el resultado final, sean posibles de simular. De lo contrario un ser humano sería incapaz de hacer un manejo correcto de tal cantidad de datos o simplemente le tomaría mucho tiempo.

En el estudio de las plantas se tienen inconvenientes como el cálculo del área foliar, el cual es una tarea complicada, y la incertidumbre de cómo será su crecimiento y su estado final de “adultez”. El cálculo del área foliar se centra en conocer con exactitud el número de hojas que tiene un árbol. Este cálculo es usado como un prerequisite importante para el estudio del intercambio de gases (entre los árboles y el ambiente) y el modelamiento de ecosistemas. Además, en las áreas urbanas y en las áreas naturales circundantes, el cálculo preciso del área foliar es crítico para la evaluación de la evapotranspiración, deposición atmosférica, emisión de compuestos orgánicos volátiles y otros procesos ecosistémicos (Nowak, 1996).

Gracias a lo previamente mencionado, se desea realizar la simulación morfogénica del Ébano (*caesalpinia ebano*) utilizando gramáticas *L-Systems*, para permitir pronosticar el crecimiento físico de un árbol observando las variaciones a través del tiempo, dependiendo de su morfogénesis (edad, especie, tipo de copa).

Un *L- Systems* es un sistema gramático formal que permite modelar la estructura de las plantas basándose en reglas que definen la generación de una cadena de caracteres que posteriormente será interpretada como la estructura del árbol.

1.1.2 Justificación del problema

La utilización de los *L-Systems* para el modelamiento de árboles, se concentra principalmente en la industria de los videojuegos, en los cuales son usados para la realización de estructuras arbóreas de alta calidad y en muy poco tiempo, evitando así el uso de modeladores 3d, que tardan mucho más tiempo, y contribuyendo a la reducción de costos.

La utilización de los *L-Systems* como método de simulación de crecimiento de plantas (en este caso de un ébano), es un campo el cual no ha sido muy desarrollado debido a que solo se usa con fines de diseño, sin embargo, puede llegar a ser una perfecta herramienta para mejorar el estudio del comportamiento de los árboles, facilitando la realización de una alta variedad de modelos de plantas.

Teniendo en cuenta lo mencionado previamente y que el ébano es un árbol que se utiliza para la arborización urbana; con la aplicación de este sistema y el modelo desarrollado, las personas encargadas del estudio de esta especie, pueden hallar una forma de documentarse sobre la edad, la forma de crecimiento y la distribución de las ramas las cuales pueden afianzar el conocimiento de detalles importantes de la especie para el momento de la plantación y el mantenimiento.

1.2 OBJETIVOS DEL PROYECTO

1.2.1 Objetivo General

Simular el crecimiento morfogénico de una planta de Ébano (*caesalpinia ébano*) para compararlo con el crecimiento de un Ébano real por medio de la utilización de gramáticas *L-Systems*.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Tabular datos parametrizados del seguimiento del crecimiento de dos plantas de Ébano (*caesalpinia ebano*).
- Construir un modelo morfogénico basado en gramáticas *L-Systems* del crecimiento de una planta de Ébano (*caesalpinia ebano*).
- Desarrollar una aplicación que permita simular el crecimiento morfogénico de las plantas.
- Realizar una comparación entre los datos obtenidos y el modelo desarrollado de la planta de Ébano (*caesalpinia ebano*).

1.3 MARCO DE REFERENCIA

1.3.1 Antecedentes

- En 2014 se modelaron las estructuras físicas de un chamizo y un arbusto común en Estados Unidos, para así saber cómo predecir la forma en que se esparce el fuego durante un incendio teniendo en cuenta la forma, dirección y longitud de las ramas de estas plantas (Prince, Fletcher, Shen, & Fletcher, 2014).
- En 2013 se estudió la generación procedimental de gajos de uvas, teniendo en cuenta todas las formas de gajos de uvas que se tienen documentadas, creando un *L-Systems* y con la ayuda de algunos motores de modelado 3D se obtuvieron unos resultados muy cercanos a la realidad (Huang, Jheng, Tai, Chang, & Way, 2013).
- En 2012 se realizó un modelo arquitectónico en *Anacardium excelsum*, para demostrar que la arquitectura arbórea si existe y que además de ello, puede ser útil para estudios de comportamiento en las poblaciones de árboles a las cuales se les tiene dicha arquitectura (Alegria, 2012).
- En el año 2011 se realizó un estudio de un modelo para poder de una manera más rápida y fácil, estudiar el desarrollo del hongo *Alternaria* ya que su estructura compleja hacía muy difícil el estudio de cómo se comportaría su crecimiento en diferentes situaciones (Taralova, Schlecht, Barnard, & Pryor, 2011).
- En 2006 se creó un modelo arquitectónico de la planta Salal (*Gaultheria shallon*) teniendo en cuenta diferentes variables del entorno y de la planta misma (Thomson & Cocksedge, 2006).
- En 2005 se resumieron algunas técnicas para modelar elementos de la naturaleza como lo son los árboles, además de eso se identificó la capacidad de esas técnicas para la interacción con factores del ambiente y fuerzas externas (Sen & Day, 2005).
- En el año 2000 se presentó un modelo biomecánico para los *L-systems* el cual modifica la estructura de los modelos haciendo que éstos se vean afectados por la gravedad, tropismos, contacto con partes de la misma planta y contactos con obstáculos de la forma de ramas (Jirasek, Prusinkiewicz, & Moulia, 2000).
- En 1995 se hizo un estudio de cómo se pueden utilizar fractales basados en *L-Systems* para el reconocimiento de objetos naturales, como lo son las plantas y árboles más específicamente (Holliday & Samal, 1995).
- En el año 1993 se muestra la concordancia que hay entre las imágenes generadas por los *L-Systems* al momento de simular algas marinas, comparando la similitud entre el modelo final y una foto de un alga real (Corbit & Garbary, 1993)

1.3.2 Marco Teórico

1.3.2....1 L-Systems

Lindenmayer Systems o *L-Systems* es una gramática formal que permite modelar la arquitectura de una planta por medio de cadenas de caracteres que van siendo

construidas recursivamente, partiendo varios elementos, que son los siguientes (Prusinkiewicz & Lindenmayer, 1990):

- Reglas: conjunto de parámetros o definiciones que establecen la evolución del sistema en cada iteración.
- Axioma o Raíz: parámetros que establecen el inicio del sistema, y según este axioma, se pueden llegar a distintos resultados a pesar de tener las mismas reglas.
- Operadores: son símbolos que permiten hacer movimientos y rotaciones y estos se utilizan dentro de las reglas. Hay un grupo de operadores que ya están definidos y especifican los movimientos al momento de hacer las gráficas, los operadores son los siguientes:
 - $+$: Rota a la izquierda un ángulo δ sobre el eje z.
 - $-$: Rota a la derecha un ángulo δ sobre el eje z.
 - $\&$: Rota a la izquierda un ángulo δ sobre el eje y.
 - \wedge : Rota a la derecha un ángulo δ sobre el eje y.
 - \backslash : Rota hacia abajo un ángulo δ sobre el eje x.
 - $/$: Rota hacia arriba un ángulo δ sobre el eje x.

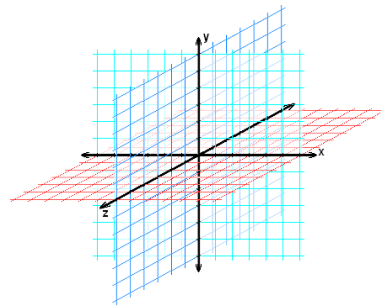
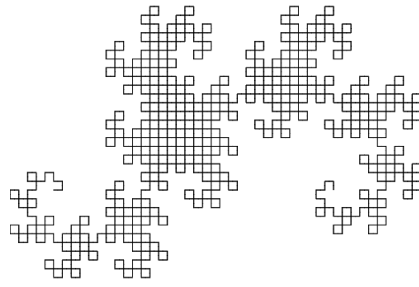


Figura 1. Ejes coordenados en el espacio 3D. (Padleckas, 2005).

- Número de iteraciones: es la cantidad de veces que se evaluarán las reglas en el axioma inicial dando diferentes resultados dependiendo del número de iteraciones.

Un ejemplo de un *L-Systems* puede ser el siguiente (Prusinkiewicz & Lindenmayer, 1990):

- Iteraciones=10,
- $\delta=90^\circ$
- Axioma: FX
- Reglas:
 - $X=X+YF+$
 - $Y=-FX-Y$



*Figura 2. Resultado del L-System luego de evaluar las reglas durante 10 iteraciones.
(Prusinkiewicz & Lindenmayer, 1990).*



Figura 3. Ejemplo de árboles generados por medio de la gramática L-Systems. (Solkoll, n.d.) [Public domain].

1.3.2....2 Planta

Son organismos multicelulares, de una nutrición mayormente fotosintética, pero hay algunas líneas que se han convertido a una nutrición basada en la absorción. Principalmente son seres inmóviles y viven anclados a un sustrato (Whittaker, 1969).

Ébano (*caesalpinia ebano*)

Es un árbol mediano, con cerca de 18m de altura, su copa aparasolada y el follaje translúcido; corteza moteada. Hojas bipinnadas, alternas y dísticas; folíolos elípticos de cerca de 1cm de largo. Flores pequeñas dispuestas en racimos axilares, de color amarillo con pintas rojizas. Fruto tipo legumbre de 6-8cm de largo. Su origen es del caribe colombiano (Herbario Universidad de Antioquia, n.d.).



Figura 4 Foto de un Ébano (*caesalpinia ebano*) tomado de (Herbario Universidad de Antioquia, n.d.).

1.3.2....3 Morfogénesis

Es el proceso por el cual se desarrolla la estructura o la forma de un organismo o parte del mismo, desencadenando así la diferencia morfológica de diferentes organismos de una misma especie (Diccionario Enciclopédico Vox 1., 2009).

1.3.2....4 Biología matemática

La biología y las matemáticas son dos ciencias separadas, pero las dos en conjunto pueden trabajar bien y se complementan, la biología matemática es una aplicación moderna de la matemática a la biología ya que en los últimos años, la biología se ha vuelto más cuantitativa. Esta aplicación de las matemáticas a la biología puede llegar a ser una unión bastante interesante ya que a los biólogos los modelos matemáticos les dan nuevas herramientas para sus estudios y a su vez a los matemáticos se les abren nuevas ramas de estudio poco exploradas (Murray, 2003).

1.3.2....5 Diagrama de clases

Es un diagrama que sirve para visualizar las relaciones entre las clases que involucran el sistema, las cuales pueden ser asociativas, de herencia, de uso y de contenimiento (Salinas, 1996).

Los diagramas de clase es una parte básica del modelamiento de un sistema ya que permite ver que puede hacer el sistema y cómo va a ser construido.

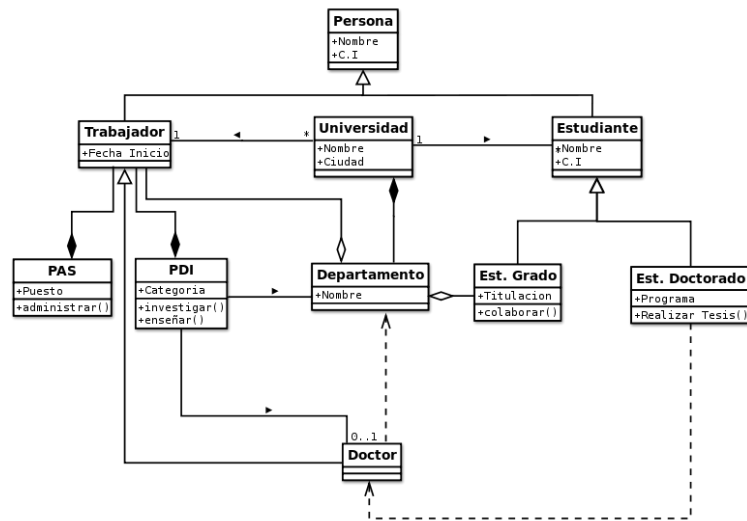


Figura 5. Ejemplo de un diagrama de clases (The Photographer, 2010)

1.3.2....6 Diagrama de arquitectura del sistema

Es un diagrama donde se plasma de forma gráfica y simplificada lo que se quiere construir. El objetivo principal de este diagrama es ofrecer una visión simplificada del sistema, de forma que una persona pueda ver el diagrama y entender lo que se quiere conseguir (Bittacorp S.L., 2008).

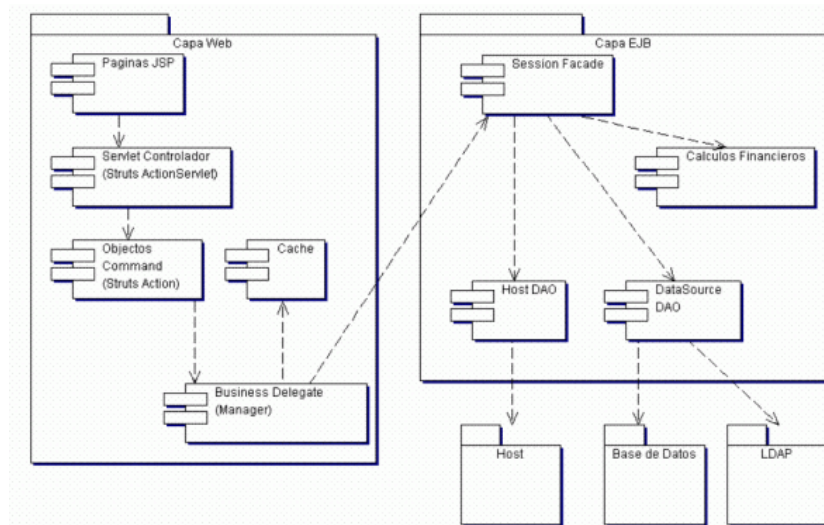


Figura 6. Ejemplo de un diagrama de arquitectura (Uribe, 2011)

1.3.2....7 Framework MVC

Para entender el concepto de *framework* MVC hay que desglosar el concepto en dos, *framework* y modelo MVC.

Un *framework* es un entorno o ambiente de trabajo para desarrollo. El entorno normalmente integra componentes y librerías que facilitan el desarrollo de aplicaciones, además de facilitar el soporte de la misma debido a su estructura y cierta estandarización (Macias, 2014).

El patrón o modelo MVC es una propuesta de diseño de software utilizada para implementar sistemas donde se requiere el uso de interfaces de usuario. Surge de la necesidad de crear software más robusto con un ciclo de vida más adecuado, donde se potencie la facilidad de mantenimiento, reutilización del código y la separación de conceptos (Alvarez, 2014).

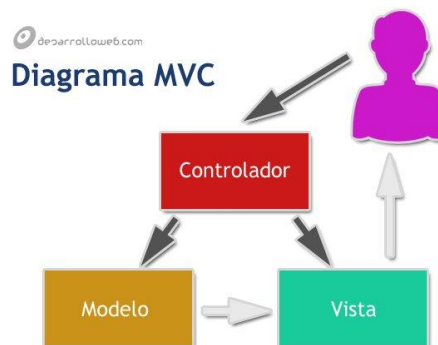


Figura 7. Diagrama MVC (Alvarez, 2014)

Con ambos conceptos claros, un *framework* MVC es un entorno de desarrollo el cual implementa el patrón MVC para el desarrollo de aplicaciones. Un ejemplo de un *framework* MVC para PHP es Laravel.

Laravel es un *framework* desarrollado por Taylor Otwell el cual implementa el patrón MVC que permite el desarrollo ágil y expresivo de aplicaciones web (Otwell, 2016).

1.3.2....8 WebGL

Es un estándar web multiplataforma de bajo nivel para las gráficas 3D basadas en OpenGL 2.0. Este hace uso del elemento de HTML5 canvas. Las gráficas obtenidas por medio de WebGL no requieren el uso de ningún *plugin*, ya que el estándar provee los métodos necesarios para poder hacer uso de las características 3D (Khronos, n.d.).

2. METODOLOGÍA

- **Primer y segundo objetivo específico:**

Debido a la alta relación de los objetivos, su desarrollo se va hacer de forma paralela; ya que para realizar la tabulación y creación del modelo de la planta de Ébano se requiere realizar el seguimiento para verificar los cambios que tiene en un periodo de seis meses, teniendo como base los siguientes parámetros: ángulo entre las ramas, largos de las ramas, cantidad y forma de las hojas. Luego de la obtención de datos y el seguimiento, se procederá a construir un modelo en base a la gramática de los *L-Systems* que se asemeje a la planta real.

- **Tercer objetivo específico:**

Para el desarrollo de la aplicación que permita la simulación de las gramáticas, se realizará una aplicación web haciendo uso de Laravel, un framework MVC de PHP. En la parte visual se va a hacer uso de VueJS y para los gráficos 3D de las plantas, se usará WebGL. No va a ser necesario hacer uso de bases de datos, porque la simulación del sistema se hace en tiempo real y no se guarda ningún dato.

- **Cuarto objetivo específico:**

Con la aplicación web que simula las gramáticas y haciendo uso del modelo realizado para el segundo objetivo específico, se compararán los resultados del simulador con la estructura que tienen las plantas en los momentos estudiados.

3. TOMA Y TABULACIÓN DE LOS DATOS

Durante un periodo de seis meses se le hizo seguimiento a dos plantas de Ébano para poder obtener las variables necesarias para realizar un modelo usando la gramática *L-Systems*.

En la toma de datos se obtuvo que durante el tiempo del seguimiento el ébano desarrolló cinco tipos de hojas, las cuales se pueden observar a continuación:



Figura 8. Hoja 1.



Figura 9. Hoja 2.



Figura 10. Hoja 3.



Figura 11. Hoja 4.



Figura 12. Hoja 5.

Teniendo claro los tipos de hojas encontradas en ambas plantas, los datos obtenidos durante los seis meses de seguimiento fueron los siguientes

| Diciembre 2015 | | |
|-----------------|---------|---------|
| | Ébano 1 | Ébano 2 |
| Edad (Meses) | 3 | 3 |
| Altura | 49 | 31 |
| Angulo Promedio | 45 | 45 |
| Longitud Ramas | 2.48 | 2.28 |
| Longitud Tallo | 7 | 7 |
| Ramas | 34 | 23 |
| Hojas | 27 | 26 |
| Hoja 1 | 19 | 15 |
| Hoja 2 | 5 | 10 |
| Hoja 3 | 3 | 1 |
| Hoja 4 | 0 | 0 |
| Hoja 5 | 0 | 0 |

| Enero 2016 | | |
|-----------------|---------|---------|
| | Ébano 1 | Ébano 2 |
| Edad (Meses) | 5 | 5 |
| Altura | 51 | 32 |
| Angulo Promedio | 48 | 50 |
| Longitud Ramas | 2.5 | 2.5 |
| Longitud Tallo | 7 | 7 |
| Ramas | 45 | 36 |
| Hojas | 42 | 35 |
| Hoja 1 | 18 | 19 |
| Hoja 2 | 7 | 9 |
| Hoja 3 | 3 | 2 |
| Hoja 4 | 4 | 5 |
| Hoja 5 | 10 | 0 |

| Febrero 2016 | | |
|-----------------|---------|---------|
| | Ébano 1 | Ébano 2 |
| Edad (Meses) | 6 | 6 |
| Altura | 51.5 | 31.5 |
| Angulo Promedio | 50 | 48 |
| Longitud Ramas | 2.7 | 2.5 |
| Longitud Tallo | 7 | 7 |
| Ramas | 47 | 24 |
| Hojas | 42 | 35 |
| Hoja 1 | 18 | 19 |
| Hoja 2 | 7 | 9 |
| Hoja 3 | 3 | 2 |
| Hoja 4 | 4 | 5 |
| Hoja 5 | 10 | 0 |

| Marzo 2016 | | |
|-----------------|---------|---------|
| | Ébano 1 | Ébano 2 |
| Edad (Meses) | 7 | 7 |
| Altura | 52 | 32 |
| Angulo Promedio | 48.5 | 49 |
| Longitud Ramas | 2.8 | 2.45 |
| Longitud Tallo | 7 | 7 |
| Ramas | 48 | 30 |
| Hojas | 45 | 41 |
| Hoja 1 | 18 | 20 |
| Hoja 2 | 10 | 13 |
| Hoja 3 | 3 | 2 |
| Hoja 4 | 4 | 6 |
| Hoja 5 | 10 | 0 |

| Abril 2016 | | |
|--------------|---------|---------|
| | Ébano 1 | Ébano 2 |
| Edad (Meses) | 8 | 8 |

| Mayo 2016 | | |
|--------------|---------|---------|
| | Ébano 1 | Ébano 2 |
| Edad (Meses) | 9 | 9 |

| | | |
|------------------------|-----|-----|
| Altura | 52 | 34 |
| Angulo Promedio | 49 | 50 |
| Longitud Ramas | 2.8 | 2.5 |
| Longitud Tallo | 7 | 7 |
| Ramas | 49 | 31 |
| Hojas | 47 | 50 |
| Hoja 1 | 18 | 20 |
| Hoja 2 | 11 | 15 |
| Hoja 3 | 4 | 5 |
| Hoja 4 | 4 | 7 |
| Hoja 5 | 10 | 3 |

| | | |
|------------------------|------|-----|
| Altura | 52 | 40 |
| Angulo Promedio | 48.5 | 46 |
| Longitud Ramas | 2.85 | 2.6 |
| Longitud Tallo | 7.1 | 7.2 |
| Ramas | 53 | 38 |
| Hojas | 50 | 58 |
| Hoja 1 | 20 | 22 |
| Hoja 2 | 13 | 16 |
| Hoja 3 | 2 | 7 |
| Hoja 4 | 3 | 7 |
| Hoja 5 | 12 | 6 |

Tabla 1. Tabulación de las variables tenidas en cuenta en los Ébanos durante seis meses.

Para poder obtener la probabilidad de ocurrencia de las hojas en el ébano se hizo el promedio de todas las hojas durante los seis meses y se obtuvo la siguiente tabla:

| Promedios | | | |
|------------------------|----------------|----------------|--------------|
| | Ébano 1 | Ébano 2 | Ambos |
| Edad (Meses) | 9 | 9 | 9 |
| Altura | 51.25 | 33.4166667 | 42.33333333 |
| Angulo Promedio | 48.16666667 | 48 | 48.08333333 |
| Longitud Ramas | 2.688333333 | 2.47166667 | 2.58 |
| Longitud Tallo | 7.016666667 | 7.03333333 | 7.025 |
| Ramas | 46 | 30 | 38 |
| Hojas | 40 | 40 | 40 |
| Hoja 1 | 18 | 19 | 18.5 |
| Hoja 2 | 8 | 12 | 10 |
| Hoja 3 | 3 | 3 | 3 |
| Hoja 4 | 3 | 5 | 4 |
| Hoja 5 | 8 | 1 | 4.5 |

Tabla 2. Promedios de los datos obtenidos de los Ébanos.

Ahora teniendo en cuenta el promedio de ambos Ébanos, las probabilidades de ocurrencia de cada tipo de hoja es:

| Hoja | Probabilidad |
|-------------|---------------------|
| Hoja 1 | 0.46 |
| Hoja 2 | 0.25 |

| | |
|--------|------|
| Hoja 3 | 0.08 |
| Hoja 4 | 0.1 |
| Hoja 5 | 0.11 |

Tabla 3. Probabilidad de ocurrencia de cada tipo de hoja

Para la construcción del modelo se necesitó tener en cuenta la forma de la planta y así tener la base para el patrón que siguen los Ébanos. Para lo anterior se observó que en ambas plantas la estructura que seguía la planta era la que se puede observar en la siguiente imagen.



Figura 13. Estructura física del Ébano

Luego de observar esta estructura, se obtuvieron las siguientes probabilidades sobre el crecimiento de una rama o una hoja a partir de una rama en crecimiento:

| Crecimiento | Probabilidad |
|--------------------|---------------------|
| Rama y hoja | 0.82 |
| Rama y rama | 0.18 |

Tabla 4. Probabilidades de cada tipo de crecimiento de las ramas

4. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO USANDO GRAMÁTICAS L-SYSTEMS

Al tener listos los datos obtenidos de las probabilidades de cada hoja, ángulo promedio entre una rama y una hoja, la longitud promedio de una rama, el tiempo en el que se hizo la toma de datos y la probabilidad de los tipos de crecimiento de las ramas y hojas, se puede proceder a construir un modelo usando las gramáticas *L-Systems*.

Para la construcción del modelo, no se va a hacer uso de los operadores que se definen en '*The Algorithmic Beauty of Plants*' (Prusinkiewicz & Lindenmayer, 1990), porque algunos de los caracteres que se definen en dicho libro, presentan problemas para la creación del motor léxico que va a ser implementado. Para este caso se van a usar las siguientes reglas basándose en las anteriormente definidas:

- + : Rota a la izquierda un ángulo δ sobre el eje z.
- - : Rota a la derecha un ángulo δ sobre el eje z.
- * : Rota a la izquierda un ángulo δ sobre el eje y.
- / : Rota a la derecha un ángulo δ sobre el eje y.
- # : Rota hacia abajo un ángulo δ sobre el eje x.
- @ : Rota hacia arriba un ángulo δ sobre el eje x.
- [: Guarda la posición en la que estaba en una pila.
-] : Vuelve a la posición en la que estaba guardada en la pila.

Con esas reglas definidas, el modelo que se construyó a partir de la estructura de ambos Ébanos se obtuvo el siguiente modelo:

Raíz: A

$A=R-5[B]+6C$ $P(A)=0.5$

$A=R-5*5[B]/6+6C$ $P(A)=0.5$

$C=R+5[B]-6A$ $P(C)=0.5$

$C=R+5/5[B]*6-6A$ $P(C)=0.5$

$B=F$ $P(B)=0.18$

$B=H$ $P(B)=0.82$

$F=R/5[B]*6G$ $P(F)=1.0$

$G=R*5[B]/6F$ $P(G)=1.0$

$H=L[/8][*9][*9][*9][*9]$ $P(H)=0.46$

$H=L[/8][*9][*9][*9][*9]$ $P(H)=0.25$

$H=L[/8][*9][*9][*9][*9][*9]$ $P(H)=0.08$

$H=L[/8][*9][*9][*9][*9][*9]$ $P(H)=0.1$

$H=L[/8][*9][*9][*9][*9][*9][*9]$ $P(H)=0.11$

Hay que tener en cuenta que los números que están al lado de cada símbolo indica que el ángulo δ que se va a aplicar en ese paso se multiplica por dicho número. Por ejemplo '*9' significa que se va a rotar a la izquierda sobre el eje 'y' un ángulo igual a 9δ .

5. DESARROLLO DEL SIMULADOR DE GRAMÁTICAS L-SYSTEMS

Hay varias técnicas de los *L-Systems*, entre ellos está el determinístico y estocástico.

En un L-System determinístico, todas las reglas que se apliquen al sistema tienen las mismas probabilidades de ocurrir. Pero en el caso del estocástico, cada regla va a tener una probabilidad de ocurrencia.

La idea de la aplicación que va a simular las gramáticas es que acepte tanto los sistemas determinísticos como los estocásticos. Para ello hay que hacer una implementación de reglas que se adapte a ambos casos.

A continuación están los diagramas de clase y de arquitectura del sistema que permiten un sistema simulador de gramáticas estocásticas y determinísticas.

5.1 DIAGRAMA DE CLASES

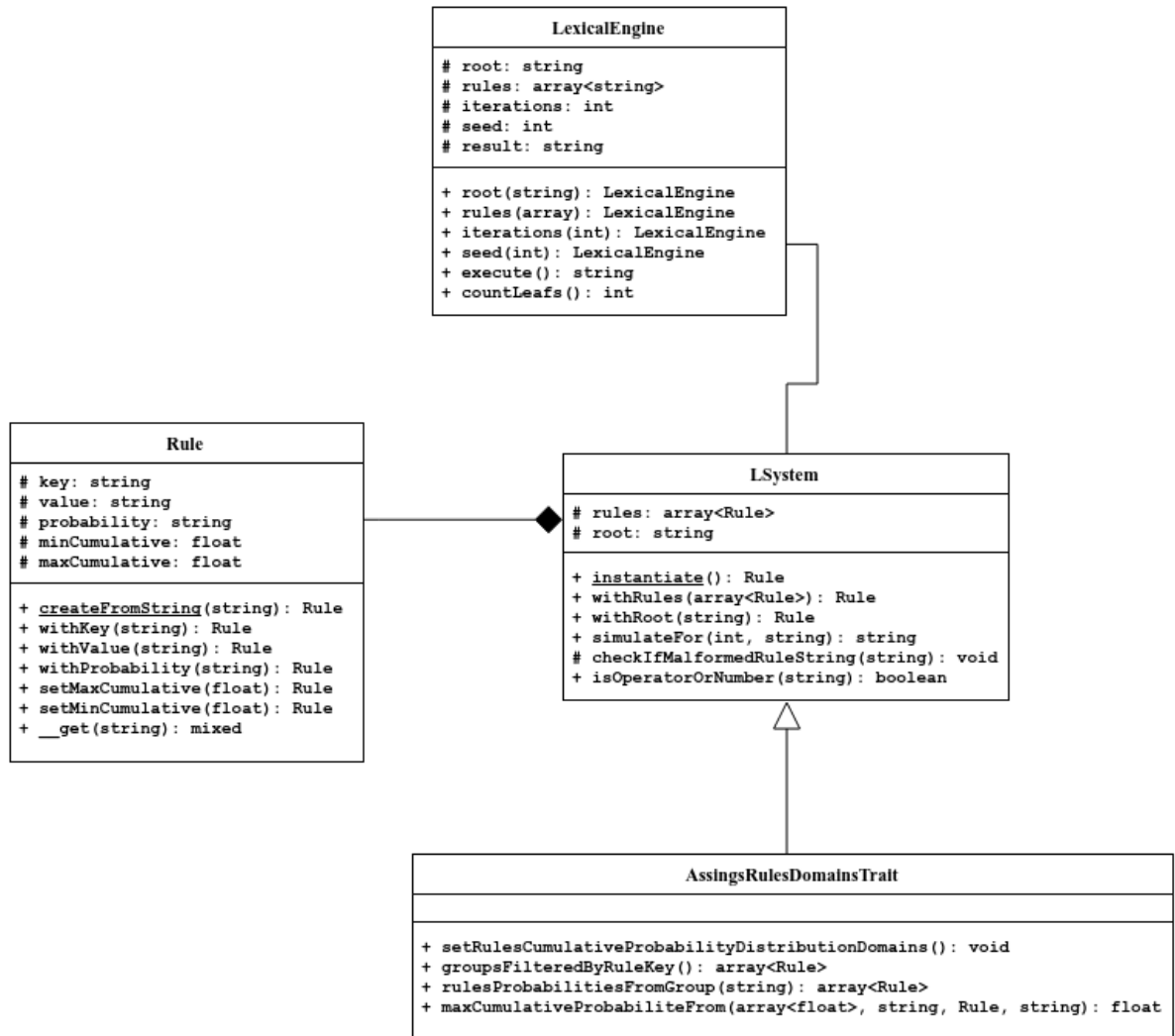


Figura 14. Diagrama de clases del simulador

5.2 DIAGRAMA DE ARQUITECTURA

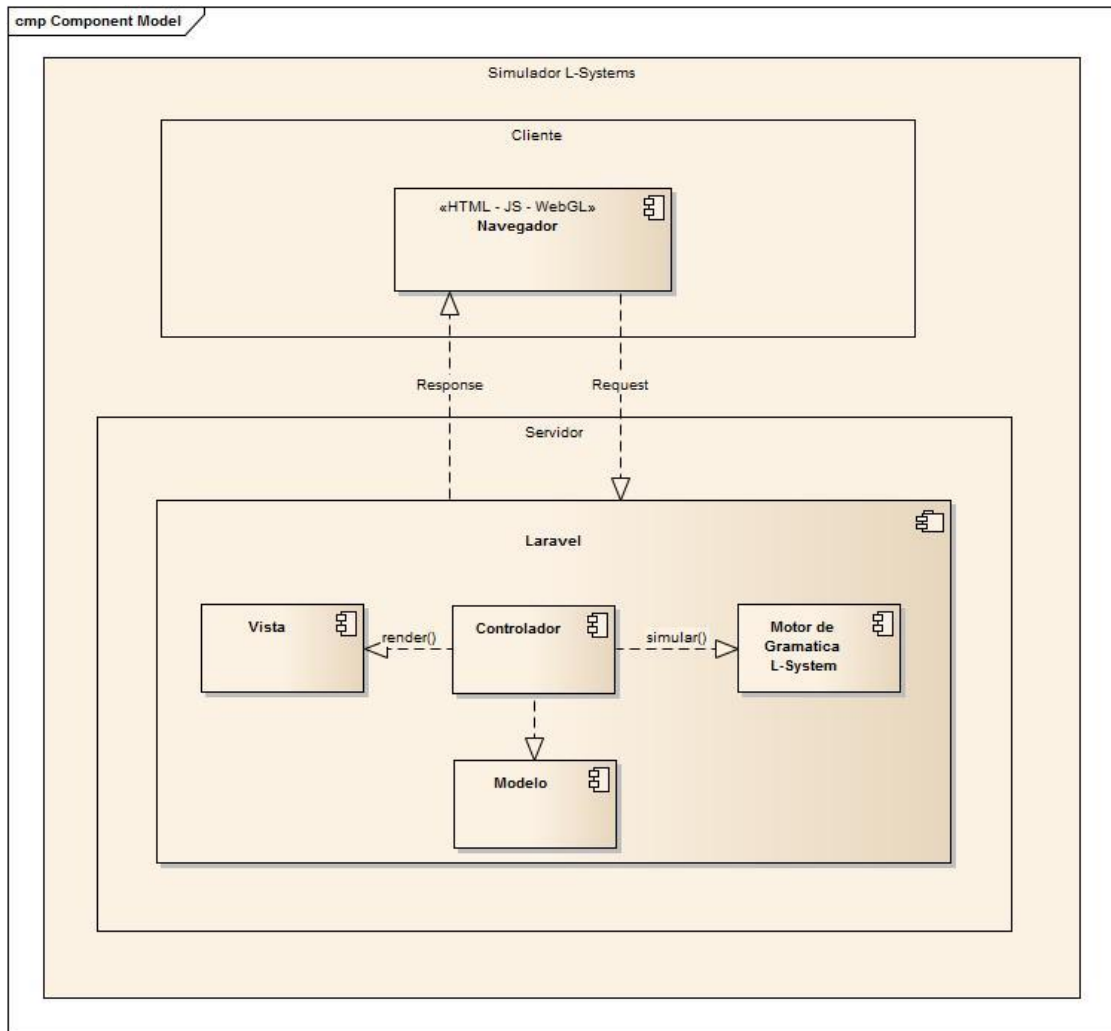


Figura 15. Diagrama de arquitectura

5.3 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El simulador se desarrolló en un ambiente web. Para el *backend* se hizo uso de PHP y un *framework* llamado Laravel. En el *frontend* se hizo uso de un *framework* llamado VueJs y una librería de WebGL llamada ThreeJS.

La aplicación recibe como parámetros de entrada:

- Raíz: Nodo inicial del L-System.
- Número de iteraciones: Cantidad de veces que se va a simular el sistema.

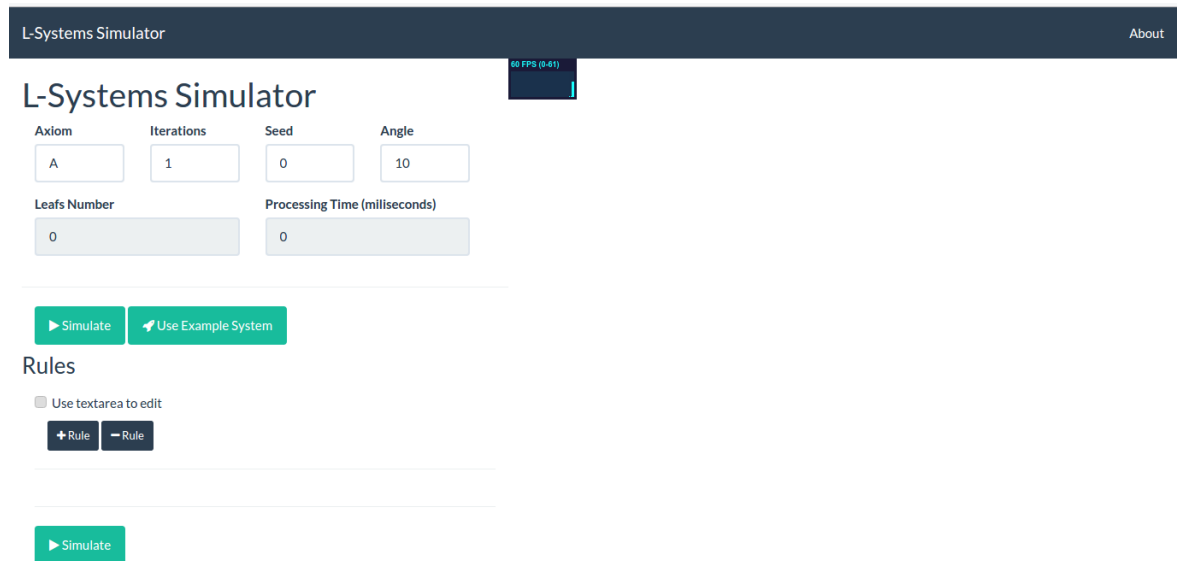
- Semilla: Número con el cual se inicializará el generador de números aleatorios.
- Angulo: Angulo que se aplicará en cada operación de dibujado (+-*/@#).
- Reglas: Parámetros que definen el comportamiento del sistema al momento de su simulación.

De los parámetros de entrada definidos anteriormente, el formato correspondiente a cada uno debe de ser:

- Raíz: Tiene que seguir la siguiente expresión regular `([A-Z1-9+\-*/#@\\[\]]+)`.
- Número de iteraciones: Número entero.
- Semilla: Número entero.
- Angulo: Número entero entre 0 y 180.
- Reglas: Tiene que seguir la siguiente expresión regular `([A-Z]){1}(=){1}([A-Z1-9+\-*/#@\\[\]]+)()?([0-9]*\\. {1}[0-9]+)?`.

5.4 FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA

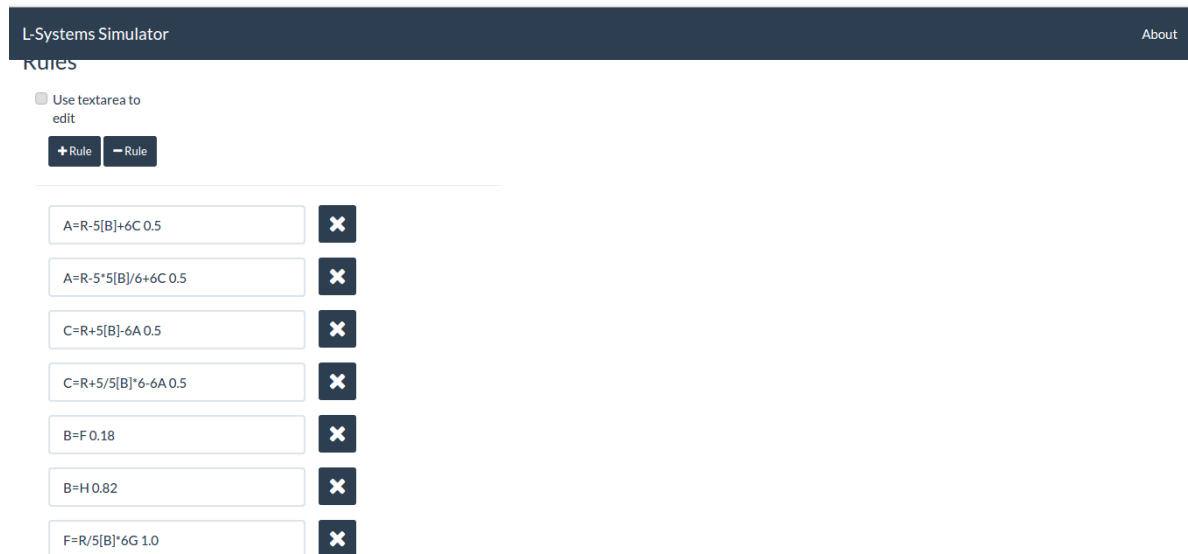
La interfaz inicial el simulador se ve así:



The screenshot shows the initial interface of the L-Systems Simulator. At the top, there is a dark blue header bar with the text "L-Systems Simulator" on the left and "About" on the right. Below the header, the title "L-Systems Simulator" is displayed in a large font. To the right of the title, a small status box shows "60 FPS (0.41)". The interface is divided into several sections. The top section contains four input fields: "Axiom" with the value "A", "Iterations" with the value "1", "Seed" with the value "0", and "Angle" with the value "10". Below these are two more input fields: "Leafs Number" with the value "0" and "Processing Time (milliseconds)" with the value "0". The middle section has two green buttons: "▶ Simulate" and "↶ Use Example System". Below this is a section titled "Rules" with a checkbox labeled "Use textarea to edit" and two buttons: "➕ Rule" and "➖ Rule". At the bottom, there is another green button labeled "▶ Simulate".

Figura 16. Estado inicial del simulador

Al ingresar las reglas queda así:



The screenshot shows the L-Systems Simulator interface after entering rules. The header bar remains the same. The "Rules" section now displays a list of seven rules, each in a text input field followed by a delete button (an 'X' in a dark square). The rules are: $A = R - 5[B] + 6C$ 0.5, $A = R - 5 \cdot 5[B] / 6 + 6C$ 0.5, $C = R + 5[B] - 6A$ 0.5, $C = R + 5 / 5[B] \cdot 6 - 6A$ 0.5, $B = F$ 0.18, $B = H$ 0.82, and $F = R / 5[B] \cdot 6G$ 1.0. The "Use textarea to edit" checkbox is still present, and the "➕ Rule" and "➖ Rule" buttons are also visible.

Figura 17. Estado del simulador luego de ingresar las reglas

Luego al darle clic al botón *simulate*, la aplicación envía al servidor los datos, el cual los analiza y los simula según el número de iteraciones, semilla y raíz. Dando como resultado algo así:

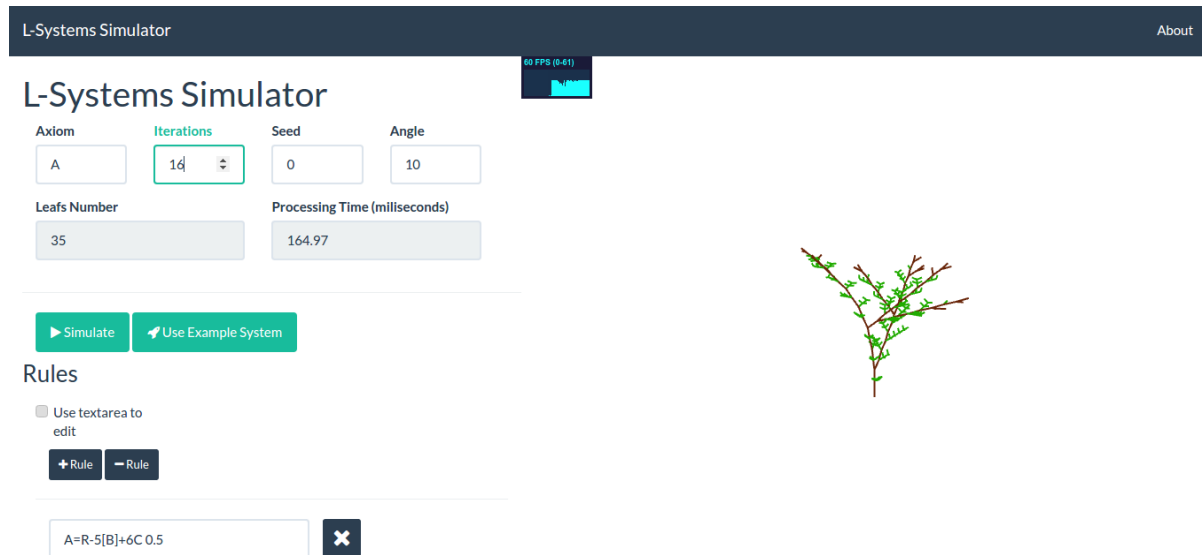


Figura 18. Resultado de la simulación

El sistema tiene un límite de memoria por lo tanto si se pone un número de iteraciones muy alto (mayor de 50 iteraciones, aunque eso depende de las reglas que se le introduzcan al sistema) va a mostrar un error diciendo que no tiene suficiente memoria.

La escala de tiempo a la que pertenece una iteración depende de las reglas del sistema, y la semilla que se le ingrese. Puede que para un *set* de reglas y semilla, una iteración equivalga a 1 semana, como puede que para otro *set* de reglas sea igual a 1 mes.

6. COMPARAR RESULTADOS DEL MODELO SIMULADO CON LOS ARBOLES REALES

Al simular varios sistemas, y comparar el número de hojas que se obtenían versus el número de hojas tomadas a las plantas se llegó a que las mejores combinaciones de semillas que mejor representaban al Ébano 1 y 2 son:

| Ébano | Semilla |
|-------|---------|
| 1 | 20 |
| 2 | 64 |

Tabla 5. Semillas que mejor representan a cada Ébano

6.1 COMPARACIÓN ÉBANO 1

Al simular varias iteraciones del modelo con la semilla respectiva del Ébano 1, se obtuvieron los siguientes datos:

| Iteraciones | Hojas |
|-------------|-------|
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 2 |
| 6 | 4 |
| 7 | 4 |
| 8 | 5 |
| 9 | 9 |
| 10 | 13 |
| 11 | 18 |
| 12 | 22 |
| 13 | 24 |
| 14 | 32 |
| 15 | 41 |
| 16 | 50 |

Tabla 6. Iteraciones simuladas del Ébano 1.

A estos datos, se les realizo una interpolación polinómica de nivel 3 y se obtuvo la siguiente ecuación que mejor representa la relación entre las iteraciones y el número de hojas:

$$y = 0.0143x^3 - 0.0627x^2 + 0.4779x - 0.5659$$

Con esta ecuación se pudo realizar la siguiente tabla para comparar los datos entre la realidad y el sistema modelado:

| Realidad | | Modelado | | |
|----------|-------|-------------|-------|---------|
| Edad | Hojas | Iteraciones | Hojas | Error % |
| 3 | 27 | 13 | 26.47 | 1.9719 |
| 5 | 42 | 15.15 | 42.01 | 0.0193 |
| 6 | 42 | 15.15 | 42.01 | 0.0193 |
| 7 | 45 | 15.5 | 45.03 | 0.0651 |
| 8 | 47 | 15.72 | 47 | 0.0076 |
| 9 | 50 | 16.05 | 50.08 | 0.1527 |

Tabla 7. Datos continuos del ébano 1 con la fórmula del sistema.

Pero como la aplicación encargada de la simulación solamente recibe iteraciones discretas, al aproximar los valores de las iteraciones los datos que obtienen son los siguientes:

| Realidad | | Modelado | | |
|----------|-------|-------------|-------|---------|
| Edad | Hojas | Iteraciones | Hojas | Error % |
| 3 | 27 | 13 | 26.47 | 1.9719 |
| 5 | 42 | 15 | 40.76 | 2.9581 |
| 6 | 42 | 15 | 40.76 | 2.9581 |
| 7 | 45 | 16 | 49.6 | 10.227 |
| 8 | 47 | 16 | 49.6 | 5.5364 |
| 9 | 50 | 16 | 49.6 | 0.7958 |

Tabla 8. Datos discretos del ébano 1 con la fórmula del sistema.

6.1.1 Ébano 1 vs Simulación



| Real | Simulación |
|---|--|
|  |  |

Tabla 9. Comparación entre el ébano 1 real y el simulado.

6.2 COMPARACIÓN ÉBANO 2

Al igual que en el Ébano 1, se simularon varias iteraciones, y los datos que se obtuvieron fueron los siguientes:

| Iteraciones | Hojas |
|-------------|-------|
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 2 |
| 6 | 4 |
| 7 | 6 |
| 8 | 7 |
| 9 | 9 |
| 10 | 12 |
| 11 | 15 |
| 12 | 17 |
| 13 | 19 |
| 14 | 20 |
| 15 | 24 |
| 16 | 31 |

| | |
|----|----|
| 17 | 37 |
| 18 | 46 |
| 19 | 58 |

Tabla 10. Iteraciones simuladas del Ébano 2

Para este caso, también se realizó una interpolación polinómica, solo que no se hizo de nivel 3 sino de nivel 4 debido a que se acomodaba mejor al comportamiento de los datos obtenidos previamente. La ecuación resultante fue la siguiente:

$$y = 0.0019x^4 - 0.0606x^3 + 0.7533x^2 - 2.3888x + 2.0308$$

Con esta ecuación se pudo realizar la siguiente tabla para comparar los datos entre la realidad y el sistema modelado:

| Realidad | | Modelado | | |
|----------|-------|-------------|-------|---------|
| Edad | Hojas | Iteraciones | Hojas | Error % |
| 3 | 26 | 14.75 | 26.15 | 0.5813 |
| 5 | 35 | 16.32 | 35.05 | 0.1529 |
| 6 | 35 | 16.32 | 35.05 | 0.1529 |
| 7 | 41 | 17.12 | 41.06 | 0.155 |
| 8 | 50 | 18.1 | 50.16 | 0.3272 |
| 9 | 58 | 18.8 | 58.05 | 0.0832 |

Tabla 11. Datos continuos del ébano 2 con la fórmula del sistema

Pero como la aplicación de simulación solamente recibe iteraciones discretas, al aproximar los valores de las iteraciones queda:

| Realidad | | Modelado | | |
|----------|-------|-------------|-------|---------|
| Edad | Hojas | Iteraciones | Hojas | Error % |
| 3 | 26 | 15 | 27.35 | 5.2069 |
| 5 | 35 | 16 | 32.96 | 5.8411 |
| 6 | 35 | 16 | 32.96 | 5.8411 |
| 7 | 41 | 17 | 40.09 | 2.2268 |
| 8 | 50 | 18 | 49.14 | 1.7264 |
| 9 | 58 | 19 | 60.54 | 4.3783 |

Tabla 12. Datos discretos del ébano 2 con la fórmula del sistema.

6.2.1 Ébano 2 vs Simulación

| Real | Simulación |
|------|------------|
|------|------------|

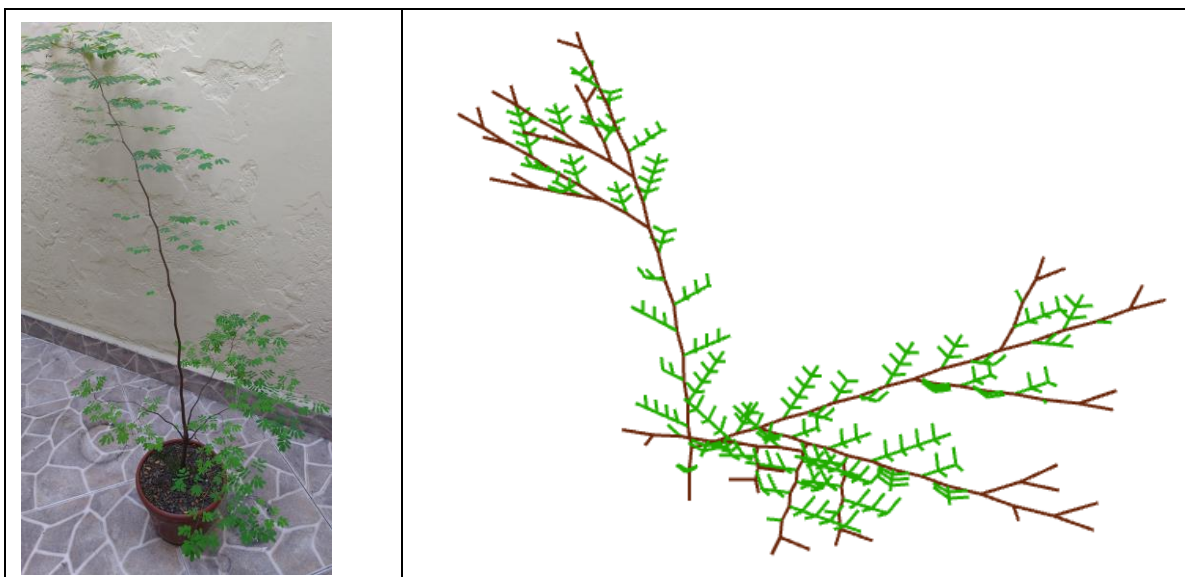


Tabla 13. Comparación entre el ébano 1 real y el simulado

7. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como se pudo observar en el literal anterior, en ambos casos las semillas escogidas llegan en cierto nivel a tener semejanzas físicas con las plantas reales. Además de las semejanzas físicas, en las comparaciones de los datos de número de hojas, los errores en porcentaje que hay entre cada edad no supera el 10%, siendo bastante acertado a pesar de que apenas se tienen 2 individuos como muestra para la creación del modelo y obtención de los datos.

No solo el número de individuos en la muestra afecta el resultado, sino el hecho de que los *L-systems* al ser un sistema guiado por iteraciones, nunca será posible simular iteraciones que no sean en un rango discreto. Por lo tanto siempre existirá un error entre el modelo real y el simulado.

Cabe resaltar, que de este estudio, se puede decir que al realizar un solo modelo que abarca la especie del Ébano, ya con solo saber el número de la semilla, se tienen todas las posibilidades de las formas en las que crecerá cada una de los individuos de la especie.

Finalmente, durante todo el proceso que se hizo desde la toma de datos hasta la comparación de los modelos, se pudo observar que el no tener en cuenta la caída de las hojas, puede afectar el modelo, la simulación y resultado de los mismos.

8. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

El estudiar las plantas para poder predecir su crecimiento físico es un tema muy interesante por las ayudas que esto genera a las personas interesadas en el estudio de las plantas. A pesar de que solamente se tuvieron dos muestras de una población 'infinita' ya que no se sabe cuál es el número de individuos en la especie de los Ébanos.

Para próximos proyectos, sería muy interesante estudiar el modelo de alguna planta, pero ya teniendo en cuenta más variables, como la luz del ambiente, humedad, probabilidad de caída de una rama y una hoja. Además de lo anterior, para mejorar el sistema sería muy interesante agregarle soporte a las probabilidades de caída de hojas y ramas, ya que durante la toma de datos, modelado y comparación de las plantas y simulaciones, se pudo ver que la caída de hojas también hace parte importante del estudio de las plantas.

Una buena forma de hacer el estudio de manera más rápida y sin necesidad de hacerle seguimiento a una planta durante mucho tiempo, es conseguir varias plantas de una misma especie, pero que todas tengan edades distintas y de ahí poder obtener más datos de unas edad más amplias en un periodo de tiempo mucho más corto.

BIBLIOGRAFÍA

- Alegría, J. L. (2012). Modelo cuantitativo de la arquitectura arbórea, en *Anacardium excelsum*, en Quimbaya, Quindío, Colombia, 51.
- Alvarez, M. (2014). ¿Qué es MVC? Retrieved from <http://www.desarrolloweb.com/articulos/que-es-mvc.html>
- Bittacorp S.L. (2008). Diagrama de arquitectura del sistema. Retrieved from <https://bittacorp.wordpress.com/2008/11/22/diagrama-de-arquitectura-del-sistema/>
- Corbit, J. D., & Garbary, D. J. (1993). Computer simulation of the morphology and development of several species of seaweed using lindenmayer systems. *Computers & Graphics*, 17(1), 85–88. [http://doi.org/10.1016/0097-8493\(93\)90055-E](http://doi.org/10.1016/0097-8493(93)90055-E)
- Diccionario Enciclopédico Vox 1. (2009). *morfogénesis*. Retrieved from <http://es.thefreedictionary.com/morfog%C3%A9nesis>
- Herbario Universidad de Antioquia. (n.d.). Ébano - *Caesalpinia ebano* H. Karst. Retrieved August 4, 2015, from <http://aprendeonlinea.udea.edu.co/ova/?q=node/619>
- Holliday, D. J., & Samal, A. (1995). Object recognition using L-system fractals. *Pattern Recognition Letters*, 16(1), 33–42. [http://doi.org/10.1016/0167-8655\(94\)00076-F](http://doi.org/10.1016/0167-8655(94)00076-F)
- Huang, C. Y., Jheng, W. T., Tai, W. K., Chang, C. C., & Way, D. L. (2013). Procedural grape bunch modeling. *Computers and Graphics (Pergamon)*, 37(4), 225–237. <http://doi.org/10.1016/j.cag.2013.01.002>
- Jirasek, C., Prusinkiewicz, P., & Moulia, B. (2000). Integrating Biomechanics into Developmental Plant Models Expressed using L-systems. *Plant Biomechanics Conference*, (1), 615–624. Retrieved from <http://algorithmicbotany.org/papers/sigcourse.2003/2-66-biomechanics.pdf>
- Khronos. (n.d.). WebGL. Retrieved from <https://www.khronos.org/webgl/>
- Macias, C. (2014). ¿Qué son los Frameworks? Retrieved from <http://blog.nubelo.com/que-son-los-frameworks/>
- Murray, J. D. (2003). *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications* (3rd ed.). Seattle: Springer.
- Nowak, D. J. (1996). Estimating leaf area and leaf biomass of open-grown deciduous urban trees. *Forest Science*, 42(4), 504–507.
- Otwell, T. (2016). Laravel. Retrieved from <https://laravel.com/>

- Padleckas, H. (2005). 3D axis. Retrieved from https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3b/3D_Cartesian_coordinates.PNG
- Prince, D. R., Fletcher, M. E., Shen, C., & Fletcher, T. H. (2014). Application of L-systems to geometrical construction of chamise and juniper shrubs. *Ecological Modelling*, 273, 86–95. <http://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2013.11.001>
- Prusinkiewicz, P., & Lindenmayer, A. (1990). *The Algorithmic Beauty of Plants. The Algorithmic Beauty of Plants*. New York: Springer-Verlag. Retrieved from <http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.lowquality.pdf>
- Salinas, P. (1996). Modelo de Clases. Retrieved September 28, 2016, from <http://users.dcc.uchile.cl/~psalinas/uml/modelo.html>
- Sen, S. I., & Day, a. M. (2005). Modelling trees and their interaction with the environment: A survey. *Computers and Graphics (Pergamon)*, 29(5), 811–823. <http://doi.org/10.1016/j.cag.2005.08.025>
- Solkoll. (n.d.). Dragon trees. Retrieved from https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Dragon_trees.jpg
- Taralova, E. H., Schlecht, J., Barnard, K., & Pryor, B. M. (2011). Modelling and visualizing morphology in the fungus *Alternaria*. *Fungal Biology*, 115(11), 1163–73. <http://doi.org/10.1016/j.funbio.2011.08.002>
- The Photographer. (2010). Diagrama de clases. Retrieved from https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/24/Diagrama_de_clases.svg/771px-Diagrama_de_clases.svg.png
- Thomson, A. J., & Cocksedge, W. (2006). Salal (*Gaultheria shallon*) harvest: A plant architecture model. *Computers and Electronics in Agriculture*, 54(2), 84–92. <http://doi.org/10.1016/j.compag.2006.08.003>
- Uribe, Y. (2011). Diagrama de arquitectura. Retrieved from <http://yuranyuribe8750.blogspot.com.co/2011/03/simbolos-uml.html>
- Whittaker, R. H. (1969). New Concepts of Kingdoms of Organisms. *Science*, 163(3863), 150–160. <http://doi.org/10.1126/science.163.3863.150>